

算数・数学科におけるオープンアプローチの数学的活動

— 数学的に考える資質・能力を育てる —

青山 庸

仁愛大学名誉教授

The Open-Approach Mathematical Activities for Students in Arithmetic/Mathematics Classrooms

— Develop Their Mathematical Thinking Quality and Ability —

Isao AOYAMA

Professor Emeritus, Jin-ai University

オープンアプローチとは、問題の自由性とそこにある答え（反応）の多様性を積極的に活用していく学習指導である。筆者は、長年の実践研究の結果、この学習指導は、数学の概念形成に優れている、数学的な見方・考え方が培われる、数学に対する意欲、態度によりよい変容がみられる等の授業改善に役立つことを明らかにしてきた。また、この学習指導の実践課題を解決するために、オープンな問題の開発、授業設計の仕方、問題のアプローチの仕方（発散的思考）、多様な答え（反応）のまとめ方（収束的思考）、まとめた内容の統合・発展の仕方（発展的な思考）、評価方法の開発等について実践研究を継続し、その成果を学会、研究紀要、著書で発表してきた。

現行学習指導要領では、子ども達が変化の激しい社会を生き抜くために、3つの柱からなる資質・能力「知識及び技能」「思考力、判断力、表現力等」「学びに向かう力、人間性等」の育成を目指している。算数・数学科では、数学的に考える資質・能力の育成である。それは、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して育てられる。オープンアプローチは、オープンな問題に内在する「自由性」「多様性」を活かしている。そこでは、子ども達は目的意識をもって主体的、対話的に数学的活動を展開し、学びを深めている。この総説では、オープンアプローチの数学的活動に着目し、数学的に考える資質・能力を効果的に育成できることを明らかにする。

キーワード：オープンアプローチ、数学的活動、数学的に考える資質・能力、数学に対する意欲、態度

1. 算数・数学科で育成を目指す資質・能力

(1) 資質・能力とは¹⁾

資質とは、子どもが学んでいくために持っている潜在的な力を意味する。能力とは、潜在的な力を使って実際に学ぶことで、子ども自らが育て、自覚的に活用できるようになった力を意味する。具体的には、思考力・判断力・表現力等を指す。ここで大切なことは、資質・能力は、全体としてゼロから身に付けるものというよりは、子どもから引き出し学習に使われるものであるということである。すなわち、知識は学んで身に付けるもの、資質・能力は自分の中にあるものを引き出し

て使うものと考ええる。

ここで、資質・能力と知識・技能（内容）を分けて考えると、資質・能力は、学ぶ対象が変わっても常に機能することが期待される力である。いわゆる「内容知」と「方法知」とに分けて考えると、資質・能力は知識・技能（内容）についての「学び方」や「考え方」に近いものであるから、「方法知」に近いといえる。「方法知」だと捉えると、資質・能力の教育は知識・技能（内容）を軽視する教育かと誤解されがちであるが、「方法知」は知識・技能（内容）をより深く学ぶために使うものであり、そうすることで、「内容知」自体も育

てられる。その過程は、「ある知識・技能（内容）を学ぶ」→「資質・能力を使う」→「より知識・技能（内容）を深める」→「内容知と方法知が融合する」→「より高い資質・能力、目標を目指す」（図1）といったサイクルで、螺旋状的な深化を目指すと考えられる。

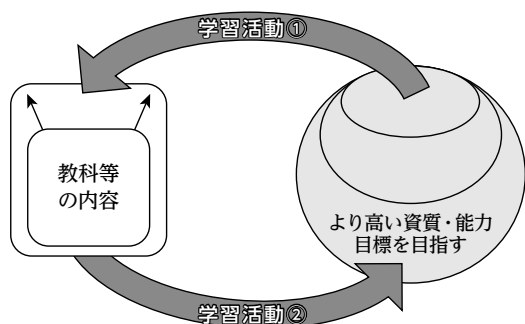


図1 資質・能力を育てる学習活動

(2) 学校で育成を目指す資質・能力

現行の学習指導要領では、変化の激しく予測困難な時代が到来しつつあることを背景に、子ども達に知・徳・体のバランスの取れた「生きる力」を育てることが掲げられている。すなわち、育成を目指す資質・能力の3つの柱「知識及び技能」「思考力、判断力、表現力等」「学びに向かう力、人間性等」に再整理し、教育課程全体を通じて育てていくとしている。

各教科等の目標や内容は、子ども達が「何ができるようになるか」を中心として再構成されている。

小学校では、「総則」の「第1 小学校教育の基本と教育課程の役割」で、「何ができるようになるか」を明確化するために、下記の①～③（3つの柱）に対応する形で各教科等の目標と内容を再整理している。

① 知識及び技能

生きて働く知識・技能の習得（何を理解しているか、何ができるか）

② 思考力、判断力、表現力等

未知の状況にも対応できる「思考力、判断力、表現力等」の育成（理解していること、できることをどう使うか）

③ 学びに向かう力、人間性等

学びを人生や社会に生かそうとする学びに向かう力、人間性等の涵養（どのように社会・世界と関わりよりよい人生を送るか）

この③の柱は、他の2つの柱をどのような方向性で働かせていくかを決定付ける重要な要素である。

子ども達が新しい時代に必要となる資質・能力を育てていくためには、各教科等をなぜ学ぶのか、それを通じてどういった力を身に付けていくのかという、教科等を学ぶ本質的な意義を明確にすることが大切である。各教科等の教育目標や内容について、資質・能力の在り方を踏まえた再編成を進めることが必要となる。各教科等を学ぶ本質的な意義の中核をなすのが「どのような視点から物事を捉え、どのような考え方で考えていくか」という「見方・考え方」であり、教科等の教育と社会をつなぐものである。子ども達に学習や人生において「見方・考え方」を自在に働かせられる資質・能力を身に付けることを教師に期待されている。

(3) 算数・数学科で育成を目指す資質・能力²⁾

① 数学的に考える資質・能力

学習指導要領では、算数・数学科の共通な総括的目標として「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成すること」と掲げている。そこで、ここでは算数科を例にとり述べていきたい。

算数科の目標は、算数の学習を通して育成を目指す資質・能力を、先に教科等で述べた3つの柱に対応する形で示されている。各学年の目標も、この3つの柱に基づいて整理されている。

総括的目標の「数学的に考える資質・能力」とは、算数科の教科目標に示された3つの柱で整理された算数教育で育成を目指す力のことである。この育成に当たっては、算数科の特質に応じた見方・考え方が重要な役割を果たす。算数科における「数学的な見方・考え方」は、「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、根拠を基に筋道を立てて考え、統合的・発展的に考えること」として整理をしている。

「数学的に考える資質・能力」を育成するためには、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動によって、知識及び技能を習得したり、習得した知識及び技能を活用して課題を探究したりすることである。その結果として生きて働く知識が身に付き、技能の習熟を図ることができる。また、日常生活の事象や算数の学習場

面から見いだした問題を解決する過程を通して思考力、表現力等も培われ、数学的に考える資質・能力が、数学的な見方・考え方をさらに成長させていくものと考えられる。この資質・能力は、他の教科等の学習や日常生活等での問題解決にも生きて働く力になる。

② 問題発見・解決過程と育成すべき資質・能力

学習指導要領では、数学的活動について、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」と概括的に規定されている。そして、同解説算数編では、数学的活動を①日常生活の事象から見いだした問題を解決する活動、②算数の学習場面から見いだした問題を解決する活動、③数学的に表現し合う活動、と内容に位置付けられている。これらの活動に加え、第1～3学年では「数量や図形を見だし、進んでかかわる活動」が位置付けられている。また、「算数・数学の問題発見・解決の過程」を「算数・数学の学習過程のイメージ」(図2)として枠組みだけを提示している。

図2は先の中央教育審議会教育課程部会答申(平成28年)で示されたものである。そのとき一緒に提示された別添4-3「算数・数学の問題発見・解決の過程と育成を目指す資質・能力」を引用にして、数学的に考える資質・能力について考えてみたい³⁾。

この図2は、大きく2つの問題発見・解決の学習過程が示されている。図中のA1, A2, B, C, D1, D2の記号は、別添4-3で表示され、矢印が示す事象や問題発見・解決を目指すために育成すべき資質・能力を指している。

図中の「数学的に表現した問題」とは、日常の事象や数学の事象における問題を数学的に表現した問題という意味である。「焦点化した問題」とは、数学的に表現した問題を解く中で生まれる問題という意味である。つまり、教科書に載っているような問題は「数学的に表現した問題」であり、その問題を解く際に、特に考えるべき部分が「焦点化された問題」となる。

学習過程の1つは、日常生活や社会の事象を数理的に捉えて問題の発見・解決を目指す過程である。左側の時計回りに示され、日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に処理する。

○ 資質・能力 A1 は、日常生活や社会の問題を数理

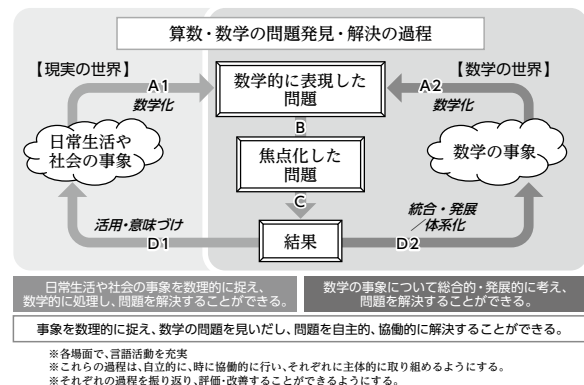


図2 算数・数学の学習過程のイメージ

的に捉えることについて

a. 事象の数量等に着目して数学的な問題を見いだす力

b. 事象の特徴を捉え数学的な表現を用いて表現する力(事象を数学化する力)

○ 資質・能力 B は、数学を用いた問題解決に向けて、構想・見通しを立てることについて

c. 数学的な問題の本質を見いだす力(洞察力)

d. 数学的な問題を解決するための見通しを立てる力(構想力)

○ 資質・能力 C は、「焦点化した問題」を解決することについて

e. 目的に応じて数・式、図、表、グラフなどを活用し、一定の手順にしたがって数学的に処理する力

f. 数学的な見方・考え方を基に、的確かつ能率的に処理する力

g. 論理的に推論する力(帰納、類推、演繹)

○ 資質・能力 D1 は、解決過程を振り返り、得られた結果を意味づけたり、活用したりすることについて

h. 得られた結果を元の事象に戻してその意味を考える力

i. 様々な事象に活用する力

学習過程の2つは、数学の事象における問題を数学的に捉えて問題の発見・解決を目指す過程である。右側の反時計回りに示され、数学の事象で得られた結果を統合・発展し、体系化して考え、より高次に数学化して、問題を解決する。

- 資質・能力 A2 は、数学の事象における問題を数
学的に捉えることについて
 - j. 数学の事象から問題を見いだす力
 - k. 事象の特徴を捉え、数学化する力
 - l. 得られた結果を基に拡張・一般化する力
- 資質・能力 D2 は、解決過程を振り返るなどして
概念を形成したり、体系化したりすることについて
 - m. 数学的な見方・考え方のよさを見いだす力
 - n. 得られた結果を基に批判的に検討し、体系的に
組み立てていく力
 - o. 見いだした事柄を既習の知識と結びつけ、概念
を広げたり深めたりする力
 - p. 統合的・発展的に考える力

2. オープンアプローチとは

(1) オープンアプローチが目指すもの

オープンアプローチとは、問題の自由性とそこにある答え（反応）の多様性を積極的に活用することで学習活動を展開する学習指導である。自由性と多様性を積極的に活用することにより、次のねらいを達成することを目指している⁴⁾。

- ① 学習目標に沿って学習内容を収束させ、基礎・基本の確実な定着を図る。
- ② その学習過程で、既習の知識、技能、考え方をいろいろ組み合わせて新しいことを発見する。
- ③ 見つけた学習内容を発展的・応用的に扱い、創造性の育成を目指す。

オープンアプローチによる学習指導では、知識、技能、考え方をいろいろ組み合わせる数学的活動が重要な意味を持つ。数学的に考える資質・能力を育てるためには、どのような数学的活動を仕組んで、学習展開していくかが大きな課題になる。

通常の授業で取り上げられる問題は、考え方が1通りであり、正しい答えが1通りに決まっている。問題に対する答えは、正答か誤答（不完全な解答も含めて）かのいずれかであり、答えは1つしかない。このような型の問題をクローズドな問題（完結した問題）と呼ぶことにする。このクローズドな問題での学習は、子ども達の側からみれば、その解き方や考え方を覚えておけばよいということになる。教師の側からすれば、

その解き方を手っ取り早く教えた方が効率が良い。となれば、従来の「知識・暗記重視型」の学習指導からなかなか脱皮出来ない。

これに対して答えがいく通りも可能になるように条件付けられた問題をオープンな問題（未完結な問題）と呼ぶことにする。問題を考える際、解き方・答え・問題をセットにして考えたとき、オープンな問題の「オープン性」は、3通りが考えられる（図3）。①は解き方が多様にある場合（解き方いろいろ）、②は答えが多様にある場合（答えいろいろ）、③は問題場面が多様にある場合（問題いろいろ）である。③は情景図や式等を提示して問題づくりをしたり、問題の条件の一部を変更して新たな問題をつくったりすることを考えている。いろいろな「解き方」「答え」「問題」は、子ども達が考え見つけたものであり、その多様性を総称して、「多様な答え（反応）」や「答え（反応）の多様性」と呼ぶことにする。また、①～③のタイプの問題（図3）を、オープンな問題と呼ぶことにする。

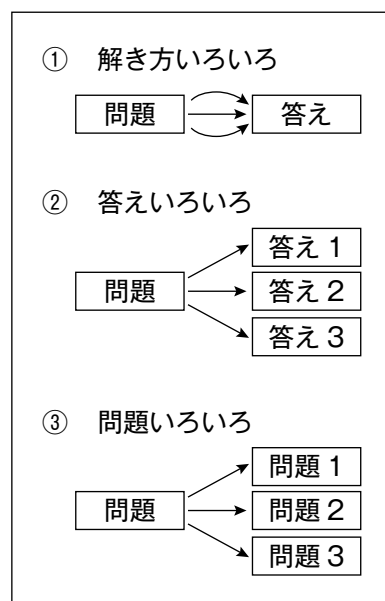


図3 何がオープンなのか

(2) オープンアプローチの学習過程⁵⁾

オープンアプローチによる学習指導は、過去数十年にわたり、福井オープンアプローチ研究会（筆者が主宰）の先生方や福井県内小中学校の協力を得ながら、実践研究⁶⁾をしてきた。その間、小中学校の教材で50個以上のオープンな問題（重複も含む）を開発し

ている。その実践研究データを集約し、共有化・客観化を試みた結果、モデル化したのが図4「オープンアプローチによる学習過程モデル」(小学校)である。中学校は、Vの学習過程が異なり「V. 一般化・抽象化」としている。

これは6つの学習過程からなる。以下、各学習過程の基本的な考え方について述べる。

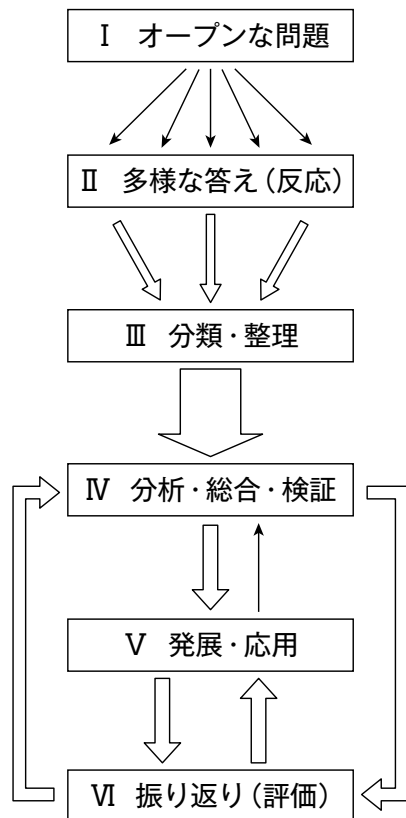


図4 オープンアプローチによる学習過程モデル（小学校）

① オープンな問題

子ども達がオープンな問題にアプローチするのが、「I. オープンな問題」の過程である。子ども達は、通常の授業では、「問題の答えは1つ答えればよい」「答えや解き方はただ1通りしかない」といった先入観をもっていることが多い。これは従来の求答重視の学習指導が影響しているものと考えられる。

オープンな問題にアプローチさせるとき「どんな解き方がありますか」「どんな性質（関係）がありますか」「どんな仲間分けができますか」「この図からいろいろな問題をつくしましょう」等と発問する。この発問だけでは、子ども達は何をどのように考えていったらよ

いか戸惑う。そのとき大切なことは、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動である。その数学的な見方は、次のようなものがある。

- i. 数・式、図、表、グラフを活用する。
- ii. 観察、操作、実験をする。
- iii. 1つの答え（反応）を取り上げ、みんなで検討する。
- iv. 問題の構造やフレーズを吟味する（問題いろいろな場合）。

実践研究では、オープンな問題にどのようにアプローチしたらよいかについて、教授方略Ⅰ⁷⁾としてまとめている。

② 多様な答え（反応）

子ども達はオープンな問題にアプローチし、多様な答え（反応）を見つけていく。その後、見つけた多様な答え（反応）を大まかにチェックする。これが「II. 多様な答え（反応）」の過程である。見つけたすべての答え（反応）をチェックの対象にする。ここでは、明らかに間違っている答え（反応）、言い換えただけの答え（反応）等、すぐ子ども達が気づくものを話し合いながら取り除いていく程度に留める。

③ 分類・整理

IIの過程でチェックした多様な答え（反応）を、ある観点（子ども達が容易に気づいた観点）で $\{a, b, c, \dots\}$ とまず整理し、次に数学的に意味のあるグループ $\{A, B, C, \dots\}$ にまとめ直すのが、「III. 分類・整理」の過程である。

答え（反応）の中には、論理的に矛盾しているもの、数学的に同じことを言っているもの、表現の仕方が違うもの等、重複した答え（反応）が数多くある。間違っているものや表現が不適切なものもある。このような答え（反応）を話し合いながら取り除いていく。そして、子ども達が気づいた観点を $\{a, b, c, \dots\}$ とまず整理していく。このような学習活動は、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動である。この数学的な見方は、次のとおりである。

- i. 正確であるか（正確性）。
- ii. わかりやすいか（明確性）。
- iii. 簡潔に表しているか（簡潔性）

ここでは、子ども達が見つけた答え（反応）全体が

概観できるようにするのが目的である。

次に、{a, b, c, …} とまず整理したものを、共通性や関連性等の見方から数学的に意味のあるグループ {A, B, C, …} にまとめ直していく。その手順は、次のとおりである。

- i. すべての答え（反応）の中から、核になりそうな答え（反応）をいくつか取り出し、それらを核にしてすべての答え（反応）をグルーピングしていく。
- ii. すべての答え（反応）の中から、核になりそうな答え（反応）を1つずつ取り出し、順次グルーピングしていく。そして、すべての答え（反応）がなくなるまでグルーピングを続ける。
- iii. すべての答え（反応）を、ある見方からそうであるグループとそうでないグループの2つに分ける。次にそうでないグループを別の見方でそうであるグループとそうでないグループに分ける。この手続きを繰り返して見方別のグルーピングをする。

このようにして数学的に意味あるグループ {A, B, C, …} にグルーピングしていく学習活動は、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動そのものである。このときの数学的な見方は、次のとおりである。

- i. 共通性はないか。
- ii. 関連性はないか。
- iii. しくみ（構造）が同じでないか。

なお、グルーピングし直した際に、各グループをそのときに考えた数学的な見方でネーミングをしておく、分析・総合・検証の過程で生きて働くようである。

実践研究では、これらの収束的活動を第一次収束と呼び、教授方略Ⅱ⁸⁾としてまとめている。

④ 分析・総合・検証

数学的に意味あるグループ {A, B, C, …} を、グループごとに分析・総合・検証するのが「Ⅳ. 分析・総合・検証」の過程である。この過程では、分析・総合した結果がそれで正しいかどうか検証することもある。

まず、各グループ A, B, C…を、より高次な数学的な見方で分析・総合する。この数学的活動の数学的な見方は、次のとおりである。

- i. 独立していないか。
- ii. 序列化できないか。
- iii. 包含化できないか。
- iv. 統合化できないか。

この数学的活動を第二次収束と呼んでいる。

実践研究では、この過程の手順は、Aにまとめたあと直ぐにそれでよいか検証をする、次にBにまとめたあと直ぐに検証をするといったように、Aを分析・総合→Aの検証→Bを分析・総合→Bの検証→Cを分析・総合→Cの検証→…と順次繰り返している。

検証では、このような数学的活動を通して基礎的な知識・技能等をしっかり定着できると考える。学習過程①から④の一連の数学的活動は、構成主義の原理「子ども自身が数学的知識を自ら構成する」という考え方に合致したものである。この一連の数学的活動により学習内容は、単なる知識・技能ではなく、生きて働く知識・技能として身に付くものになる。

なお、実践研究では、この第二次収束の活動を教授方略Ⅲ⁹⁾としてまとめている。

⑤ 発展・応用（小学校）、一般化・抽象化（中学校）

「Ⅳ. 分析・総合・検証」の過程の後、算数では、発展的・応用的に考える。数学では、一般的・抽象的に考える。それが「Ⅴ. 発展・応用」（小学校）「Ⅴ. 一般化・抽象化」（中学校）の過程である。

この学習過程は、「分析・総合」した答え（反応）をさらに発展的に扱うことを意味している。算数の「発展・応用」は、数学的な見方・考え方から学習の深まりや広がりを考えている。発展とは、他教科等の学習はもとより、これから先の算数や数学の学習に発展することである。応用とは、子ども達の生活に活用することを意味している。数学の「Ⅴ. 一般化・抽象化」は、収束させた答え（反応）を発展的思考することを意味している。この学習活動は、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動そのものである。このときの数学的な見方は、次のとおりである。

- i. 次の学習に発展できないか。
- ii. 生活に活用できないか。
- iii. 概念形成ができないか。
- iv. 体系化できないか。

⑥ 振り返り（評価）

学習全体を振り返るのがこの「Ⅵ. 振り返り（評価）」の過程である。振り返る項目は、「ここで学んだ内容は何であったか」（知識及び理解）、「答え（反応）をまとめていったとき、どんなアイデア（どの着眼点）が素晴らしかったか」（思考力・判断力・表現力等）、「友達に伝えるためにどんな創意工夫をしたか」「この学習は自分にとってどんな意味があったか」（学びに向かう力、人間性等）等、資質・能力の3つの柱に沿ったものである。子ども達自身がこれらの項目に沿って振り返り、評価していくことが大切である。

具体的には、評価問題（オープンな問題も含む）で調べたり、アンケート形式で自己評価したり、感想を書いたりして振り返らせる。また、それらを活用してポートフォリオ的思考方で振り返らせることもある。

3. オープンアプローチの学習過程の実例

(1) 中学校の事例

① オープンな問題

「1次関数の性質（2学年）」¹⁰⁾（配当時間7時間）の学習過程を取り上げる。下記のオープンな問題は、先に述べた「答えいろいろ」の問題例である。

② 多様な答え（反応）

【問題】1次関数の性質を調べてみよう。

- ① $y = 2x + 2$ ② $y = -3x + 2$ ③ $y = 2x$ ④ $y = -3x$
 ⑤ $y = -3x - 3$ ⑥ $y = 2x - 2$ ⑦ $y = -2x + 2$

①～⑦の1次関数の中で2つ以上に共通な性質をあげ、それらの番号を書きなさい。このとき、共通な性質を式、表、グラフのうち主に何で気づいたかも一緒に書きなさい。

この問題は、3つの関数的な表現（式、グラフ、表）を比較・検討しながら①～⑦の1次関数で2つ以上に共通な性質を多様に見つけるオープンな問題である。1次関数の式、グラフ、表の関数表現ができるようになった時点で学習する。

子ども達は、次のような関数表現の特徴を活用しながら2つ以上に共通な性質を多様に見つけていく。

○グラフは、視覚的、直観的な見方で、交点、位置関係、傾き方等に気づきやすい。

○表は、系列的、リズム的な見方で、変化の増減に気づきやすい。

○式は、等式の見方で、式の形に気づきやすい。

それぞれの関数表現は、このような関数の特徴がイメージしやすく、1次関数の性質をたくさん見つけていく有力な道具になる。

この過程では、子ども達が見つけた答え（反応）を、話し合いながら明らかに間違っているもの、表現の仕方が単に違うだけのもの等を取り除いていく。そして、大まかに整理をしていく。

③ 分類・整理

子ども達が見つけた多様な性質を、次のような手順で分類・整理していく。

○グループごとに話し合い、各自が見つけた性質を重複がないように分類・整理する。それをカード（八つ切りの画用紙横長半分程度の大きさ）に記入する。

○カードを使って、学級全体で、主に何でわかった（式、グラフ、表）別に整理・分類する。

式、グラフ、表、別に整理した結果が表1である。

表1 1次関数の共通な性質

手段	共通な性質	手段	共通な性質
グラフから分かったこと	(1) 右下がりの直線である。	表から分かったこと	(14) x の値が増加すると y の値が減少する。
	(2) ①の $y = 2x + 2$ のグラフに平行である。		(15) x が2倍になると y も2倍になる。
	(3) y 軸について対称である。		(16) x の値が増加すると y の値も増加する。
	(4) 原点(0, 0)を通る。		(17) x が-2のとき y が6になる。
	(5) 変域のないグラフである。		(18) x が1増加すると y は2増加する。
	(6) x 軸について対称である。		(19) x の係数ずつ増えている。
	(7) x の係数が同じだと平行になる。		(20) x が0のとき、 y は $y = ax + b$ の b の数である。
	(8) ②の $y = -3x + 2$ のグラフに平行である。		(21) x が1増加すると y は3減少する。
	(9) y 軸と $y = ax + b$ の b の点で交わる。		(22) x が1増加すると y は a 増加する。
	(10) (0, 2)の点を通る。	式から分かったこと	(23) $y = ax + b$ ($a \neq 0$) の形の式である。
	(11) (-1, 0)で交わる。		(24) x が0のとき、 $y = 2$ で表される。
	(12) (1, 0)で交わる。		(25) $y - b$ は x に比例する。
	(13) 右上がりの直線である。		

実践研究では学級により多少の答え（反応）には違いはあるが、全体としてはあまり変わらないようである。

次に式、グラフ、表、別にまとめた答え（反応）を、「共通性はないか」「関連性はないか」の数学的な見方で、数学的に意味のあるグループにまとめ直していく。グループをまとめ直すための数学的活動は、ある性質1つを取りだし、それを核にして関連性のある性質を

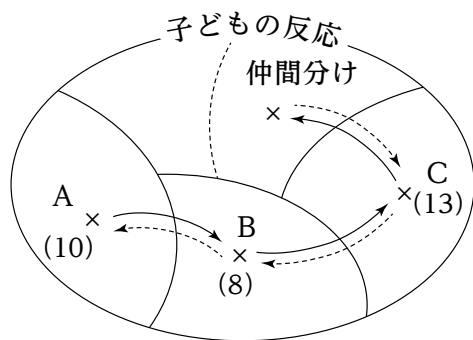


図5 答え（反応）のグルーピング

抽出して、1つのグループをつくる。また、残っている性質の中から核になる性質を1つ取り出し、それを核に関連性のあるグループをつくる。このような数学的活動を繰り返すことにより、先にグルーピングしたものを共通性、関連性のある性質という数学的な見方でグルーピングをし直していく（第一次収束）。

実践研究では、性質（10）を核として関連性のある性質として $\{(4), (9), (10), (20), (24)\}$ （表2の番号A）をグループにしている。次に、（8）を核として関連性のある性質として $\{(2), (7), (8), (18), (21), (22)\}$ （表2の番号B）をグループにしている。このような数学的活動を繰り返し、表1の性質がすべて関連付けられるまで続ける。

このように共通性や関連性があるかどうかで $\{A, B, C\}$ にグルーピングし直し、それぞれをネーミングする。この結果が表2である。

表2 関連性のある性質

番号	核にした性質	グルーピングした性質	各グループのネーミング
A	(10)	(4) (9) (10) (20) (24)	b の性質
B	(8)	(2) (7) (8) (18) (21) (22)	a の性質
C	(13)	(13) (15) (16) (19)	右上がりのひみつ
D	(1)	(1) (14)	右下がりのひみつ
E	(3)	(3) (6)	対称の見方
F	(25)	(23) (25)	比例の見方
G	(11)	(11)	点を通るという見方
H	(5)	(5)	変域の見方

④ 分析・総合・検証

次に、分類し直したA, B, C…のグループごとに分析・総合・検証していく。この過程では、分析・総

合した後、それで正しいかどうか検証することも含まれる。

表、式、グラフは、関数表現の3点セットである。ところが、子ども達はある関数表現で見つけた性質を、他の関数表現では説明できないことが多い。例えば、表の上で「 x の値が増加すると y の値も増加する」という性質を見つけても、式の上ではどういうことなのか、グラフの上ではどういうことなのか、ということの説明できない。そこで、見つけた答え（反応）をA, B, C…のグループごとに、表、式、グラフでの関数表現を相互関連的に分析し、総合していく。その総合する方向は、表3である。この数学的活動は、1次関数の性質の関数表現を関連付ける「単純化」（この論文p.66参照）といわれる過程である（第二次収束）。

その手順は、Aの分析・総合した後すぐ検証をし、次にBの分析・総合した後すぐに検証し、と順次繰り返していく。

表3 分析・総合・検証の方向

A	(10)	$y = ax + b$ の b の意味 直線が点 $(0, b)$ を通る意味
B	(8)	$y = ax + b$ の a の意味
C	(13)	変化の割合、傾き、 y 切片等の意味
D	(1)	傾き、 y 切片を使って一次関数のグラフを書くこと
E	(3)	x 軸、 y 軸に対称なグラフ
F	(25)	一次関数の比例の見方
G	(11)	交わる意味
H	(5)	変域の意味

⑤ 一般化・抽象化

ここでは、1次関数の性質全体を総合的に考え、式に読み込み、1次関数の概念のイメージ化を図る。

$y = -2x + 2$ を例にすると、グラフで「傾きが -2 」、式では「変化の割合が -2 」、表では「 x の値が1だけ増加したとき y の値は2減少する」であることを意味する。このように関数表現を相互関連させて分かったいろいろな性質を総合的に考え、1次関数の式に読み込む。そして、1次関数の概念の実体をイメージできるようにする。その際、グループごとに分かった性質全体を俯瞰しながら総合的に見ていくことが大切である。これは、「体系化」（この論文のp.65の図7参照）といわれる数学的活動で、1次関数の概念形成を図っている。

実践研究では、 $y=ax+b$ の a や b の意味、変化の割合の意味、大局的な変化の捉え方、対称性、変域の意味等の性質を総合的に考え、1 次関数の式の中に読み込み、1 次関数の概念の実体をイメージできるように概念形成を図っている。

⑥ 振り返り（評価）

1 次関数の学習全体を振り返るのがこの学習過程である。振り返ることは、「知識及び技能」「思考力・判断力・表現力等」「学びに向かう力、人間性等」の柱からの資質・能力である。子ども達自身がこれらの項目に沿って振り返り、評価していくことが大切である。

(2) 小学校事例

① オープンな問題

「かさ（3 学年）」（配当時間 2 時間）の学習過程を取り上げる¹¹⁾。オープンな問題は、「かさ」の普遍単位の必要性を考える「解き方いろいろ」の問題例である。

【問題】どちらの水とうがたくさん入るかくらべてみよう。くらべ方をいろいろ考えよう。

このオープンな問題は子ども達の体験や発想に応じて多様な測定の方法を考えることができ、身近なものを使って様々な確かめができる。2 人組で数学的活動（「かさ」比べ）を行うことにより、一人一人の考えを十分に検証することができ、問題解決ができるものと思われる。ここで大切なことは、多様な道具や十分な時間、場所（例えば家庭科室）を確保してアプローチさせることである。

② 多様な答え（反応）

実践では、図 6 で示した①～⑧のような多様な「かさ」比べを考えた。ここでは、答え（反応）の中で直接比較、間接比較、任意単位、の考え方の図を 2 例ずつ挙げている。実践では、同じ考えの比べ方が多くあったが、分類・整理の過程で図 6 の数にまとめている。

③ 分類・整理

分類・整理するために大事なことは、{①, ②, ⑧}といった正確に比べられない間違いを、話し合いで見つけ出すことである。このとき話し合いの中心になったのは⑧の水筒の太さと高さによる比較である。実際に見た目は、太くても高くても多く入らない容器（内

径が小さい）がある。子ども達は、このことが分かった驚きの表情を見せ、すぐに納得したようである。

次に、子ども達が見つけた答え（反応）の中で代表的な答え（反応）を（実践研究では③, ⑤, ⑥を選ぶ）を選び、それを核に {③}, {⑤, ④}, {⑥, ⑦} のようにグルーピングしていく。

これは、「共通性」「関連性」の見方からの数学的活動である（第一次収束）。次に、各グループのネーミングをしていく。実践研究では、⑤のグループを「カップ何ばいのわざ」（任意単位による比較）、⑥のグループを「同じ入れ物のわざ」（間接比較）、③のグループを「入れかえのわざ」（直接比較）とそれぞれネーミングしている。



図 6 見つけた「かさ」比べの仕方

④ 分析・総合・検証

この学習過程では、先のグループを序列化することを考えている。

(○よい点 ●不便)

〈同じ入れ物のわざ〉

- 大きい入れ物に入れるとこぼれにくい。
- 水の量が見てすぐ分かる。
- 同じペットボトルで量ると36本必要。印を付けても分かりにくい。

〈入れかえのわざ〉

- トーナメントみたいに勝ち抜き戦で調べていく。
- 学級の人々とやると何回もやらないといけない。

〈カップ何ばいのわざ〉

- カップ何ばいか分かる。
- 一人一人、数で表すことができる。
- 何ばいも入れるとこぼれやすい。

実践では、そこに追いつくために「学年で一番かさの大きな水筒をみつけよう」という新たな問題を提示している。すなわち、隣同士やグループでかさを比べるだけでは、直接比較、間接比較の方法で簡単に比較出来るので、単位の必要性を感じないと考えられる。「学級で一番かさの大きな水筒をみつけよう」とすると、見ただけで分かってしまう場合もある。そこで、比べる数を増やすことと同時に比べられないという場を設定するねらいで「学年で一番かさの大きな水筒をみつけよう」という問題を提示している。また、「順番も付けよう」という問いも付け加え、任意単位や普遍単位の必要性やよさを実感できるようにしている。そして、ワークシートに自分の考えを書かせている。その際、「今この場にはいない3年2組も含めて一番大きな水筒を見つけたいこと」と「順番も付けたいこと」を知らせ、どの方法が一番よいかを考えさせた。その結果、子ども達が考えたよい点、不便な点は、枠

組みで示したとおりである。

当初、同じ入れ物のわざが簡単に早くできると考えた子どもが多かったが、実際に36本の実物大ペットボトルの絵を示し、作業の大変さや印付けのみにくさを実感させたので、カップ何杯のわざ（任意単位による測定）の便利さに気付いたようである。こぼさないように気を付けて量れば、一人一人のかさを数値で表すことができ、しかも短時間で量れることを話し合い、「入れかえのわざ」⇒「同じ入れ物のわざ」⇒「カップ何ばいのわざ」⇒「L ますのわざ」（次時の学習内容）の序列化（第二次収束）を導き出すことができた。

⑤ 発展・応用

話し合いの後にすぐにカップを使って測定をし、短時間でしかも順番付けもできることを確かめている。「かさ」比べは同じカップを使って何杯分と表すと便利だということを実感していたようである。

⑥ 振り返り（評価）

この学習過程では、学習後の感想文で評価している。学習の中で楽しく感じたのは、水筒の「かさ」比べの測定の数学的活動である。このような生活に密着した日常生活に必要な学習は、机上の学習では十分に理解できないところがある。実際に水を使って比べたり、身の回りにある入れ物のかさを量ったりすることで、理解を深めることができる。

4. オープンアプローチの数学的活動

(1) 数学的活動モデル

オープンアプローチの数学的活動に着目し、その特徴を明らかにするために、能田伸彦氏の数学的モデル¹²⁾(図7)を参考にする。能田伸彦氏の数学的活動モデルは、算数・数学科の授業の数学的活動に視点を当てたものであり、学習活動を数学的活動の視点から分析・考察するのに優れている。また、算数・数学では、具体物から概念形成、概念間の関係判断と関係推理、問題や学習内容の体系的な理解、数学的に処理されたものを活用したり発展したりする活動、新しく創り出す活動等いろいろな思考や活動が考えられる。なお、このモデルの説明で、オープンアプローチの学習指導や実践事例を使って説明しているのは、筆者が加筆したものである。

(A) 具体的、操作的レベル**(I) 現実的・具体的場面**

子どもが生活している身の回りの具体的な世界である。

(III) 理想化された単純な場面

実際問題として子どもの生活と密着している事象は、一般に複雑な世界であり算数・数学の舞台にのせにくい。そこで、事象を疑似モデル化して理想化する。電車や自動車の走りを等速運動と考えるのがその1つの例である。

(V) 数学的モデルの場面

式、表、グラフあるいは教具といった媒介物で表現されたものを考えている。これらで表現されたものは一般的に抽象的な概念であり、子ども達にとって理解しにくいものである。しかし、表現方法の相互関連（例えば、言葉、数、式、図、表、グラフ）を考え、それらを用いて考えたり説明したりすることにより、ある概念の実体がイメージできるようになり、子ども達の理解を助けるものになる。例えば、伴って変わる2つの数量のイメージをさせるために、図を書いたり、表に表したり、グラフを書いたり、式に書いたりして、それらの表現方法から見える性質を関連付けて考えさせ、その変わり方のきまりや性質を調べることがその例である。事例「1次関数」で、表、式、グラフを相互関連的に分析し、総合しているのもこの例である。オープンアプローチの数学的活動によく用いられる。

なお、I、III、V、の場面の分け方は、子ども達の発達段階を考え、相対的なものであり絶対的なものとは考えない。

(B) 抽象的、思维的レベル**(II) 個々の概念**

数量や図形に関する個々の名称を単に覚えているだけで、使っていくうちに言葉の本来の意味を理解していくといった十分概念形成が出来ていない素朴なレベルである。

(IV) 関連づけられた数学的概念

個々の概念を関連付けることを意味する。そのとき、以前の経験あるいは学習したことのある個々の概念と葛藤や干渉を起こすことがある。例えば、自

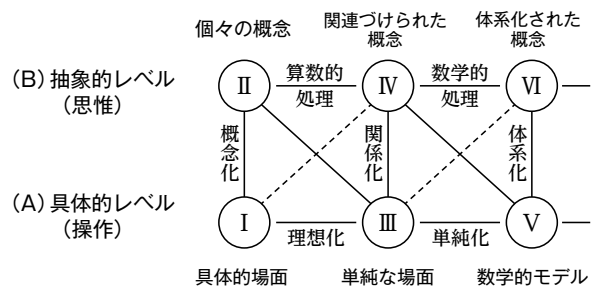


図7 数学的活動モデル

然数の範囲では、積は必ず被乗数よりも大きくなるが、分数や小数の場合は必ずしもそうはならない。子ども達にとって大きな驚きであり、葛藤が起き、かけ算に対する概念の再構成が求められる。そこで、子ども達は、既に頭にある体系を変え、自分なりに新しい概念を構成して今までの体系の中に位置づけ、再体系化していくことになる。

(VI) 体系化された数学的概念

ここでは、数や図形等の諸性質を捨象したより抽象的な理論を指す。数学的にいえば、数や図形の大小関係を示すところの束論や変換としてみられる群論がそれに該当する。このように数学の対象は抽象化され、一般化され続けるので、強力な武器として驚くほどの仕事をする事ができる。

しかし、学校数学では子ども達のレベル（発達段階）を考えるべきである。出来上がった数学体系を基準として絶対的なものとして捉えるのではなく、子ども達のレベルにおいて子ども達なりに体系化できたかを考える相対的なものとして捉えていく。

(2) 数学的活動の種類

ここでは、数学的活動のプロセスと学習内容をさらに分析し、考察していきたい。

① 概念化 (I ⇒ II)

「概念化」といわれる過程である。例えば、事例「かさ」は、普段使っている水筒を利用して隣同士でかさ比べをしている。ここでは、一人一人の水筒の形やデザイン等を捨象して、2つの容器として概念化し、「かさ」を比べようとしている。これが「概念化」の1例である。

② 具体化 (II ⇒ III)

「具体化」といわれる過程である。個々に形成された概念を具体的事物に対応させ、概念の外延（概念の

適応される範囲)を拡大させるとともに、その概念の適応できる範囲を明確にしていくことである。数「3」の例でいえば、これは子どもの念頭での働きであるから、概念ができていのかどうか教師の方は理解できない。そこで、数「3」が理解されたかを見るためにおはじきや数え棒3個を取り出させる。これが具体化である。

③ 理想化 (I⇒III)

「理想化」といわれる過程である。ここでも概念形成が行われる。「概念化 (I⇒II)」は捨象を伴う抽象であるのに対して、「理想化 (I⇒III)」はおはじきとか数え棒といった簡単なしかも操作しやすいものに置き換えて行う働きである。

④ 関係化、関連化 (III⇒IV)

「関連化」といわれる過程である。いくつかの概念や記号であるまとまりのある内容を表現したり、処理したりする働きを表す。

オープンアプローチによる学習指導では、オープンな問題で発散的思考した答え(反応)を数学的に意味のあるグループに分けている。それをグループごとに焦点化した問題とし、その問題を分析・総合・検証している。これを図2「算数・数学の学習過程のイメージ」に対応させて考えると、「数学的に表現した問題」(オープンな問題)を「焦点化した問題」(意味あるグループの問題)にしていることになる。この数学的活動では、問題解決に向けての構想・見通しを立てる力が培われよう。事例「1次関数」がその典型的な例である。

⑤ 算数的処理 (II⇒IV)

「算数的処理」といわれる過程である。個々の概念の組み合わせでもって、四則計算、合同や相似等の概念を形成することをいう。

事例「かさ」では、水筒のかさの比べ方を序列化しようとしている。これは、いくつかの水筒のかさを「算数的処理」する数学的活動である。オープンアプローチによる学習指導では、「概念化」から「算数的処理」のプロセスを通してある概念の育成を図ろうとするアプローチがよくあり、効果的である。

⑥ モデル化 (IV⇒V)

「モデル化」といわれる過程である。数学的実体を表す具体的媒体であって、一般には教具などを指すが、

グラフや図であってもよい。

⑦ 単純化 (III⇒V)

「単純化」といわれる過程である。「理想化」のプロセスと本質的に類似している。「単純化」では、式、表、グラフといった媒介物で数学的実体を表現するためのモデルとみなすことができる。しかし、これらの媒介物は抽象的概念であって、子ども達にとっては理解しにくいものであるが、それらを用いて慣れてくると実体がイメージされ、子ども達の理解を助けるものになる。そういう意味で高次のモデルであるといえよう。

オープンアプローチによる学習指導では、後で述べる「おはじきの問題」のように、理想化、単純化の数学的活動により、概念形成を図ることが多い。

⑧ モデルの抽象化 (V⇒IV)

「モデルの抽象化」といわれる過程である。算数・数学では、むしろその逆の方向で、数学的な実体を子どもに理解させ、把握しやすくするための指導がとられている。

⑨ 数学的な処理 (IV⇒VI)

「数学的な(表現)処理」といわれる過程である。数学では、簡潔、明確を尊び、そのための体系化を行う。したがって、このプロセスでは主に数学的活動である統合、発展を行うところである。

オープンアプローチによる学習指導では、「分析・総合・検証」や「発展・応用」(小学校)「一般化・抽象化」(中学校)の過程で、常に数学的活動が展開される。「分析・総合・検証」の過程では、「包含化」「統合化」が、「発展・応用」の過程では、「他教科への発展」「生活の活用」が、「一般化・抽象化」の過程では、「概念形成」「体系化」が常に展開されている。後で述べる事例「小数のかけ算」では、かけ算の仕方を「かけ算のきまり」に統合しているのもこのよい例である。

⑩ 類推・類比 (I⇒IV)

「類推・類比」といわれている過程である。この過程では、既知の「理想化」を操作的に行いながら、一方念頭では(II⇒IV)の「算数的処理」を行っている場合である。

⑪ 直観 (III⇒VI)

「直観」といわれている過程である。この過程では、「類推・類比」と本質的によく似ている。(IV⇒VI)の「数

学的な処理」を行うとき、既知の「単純化」の活動を行いながら、一方念頭では数学的処理（Ⅳ⇒Ⅵ）を行っている場合である。

(3) オープンアプローチの数学的活動の特徴

実践研究の結果、オープンアプローチの「解き方いろいろ」「答えいろいろ」の問題は、3つの観点から分類できることが明らかになった。1つ目の観点は、きまりや関係を求める問題（how to find）である。2つ目は、分類を求める問題（how to classify）、3つ目は、数値化を求める問題（how to measure）である。¹³⁾

そこで、図7の数学的モデルを使って、3つの観点別の実践事例の数学的活動の思考と活動の特徴について考察してみたい。

① 「小数のかけ算」（第5学年）¹⁴⁾

○ オープンな問題（配当時間2時間）

1mのねだんが80円のリボンを、2.3m買いました。代金はいくらですか。
式： 80×2.3 （前時で学習済み）
この式の計算の仕方をいろいろ考えてみよう。

○ 予想される多様な答え（反応）

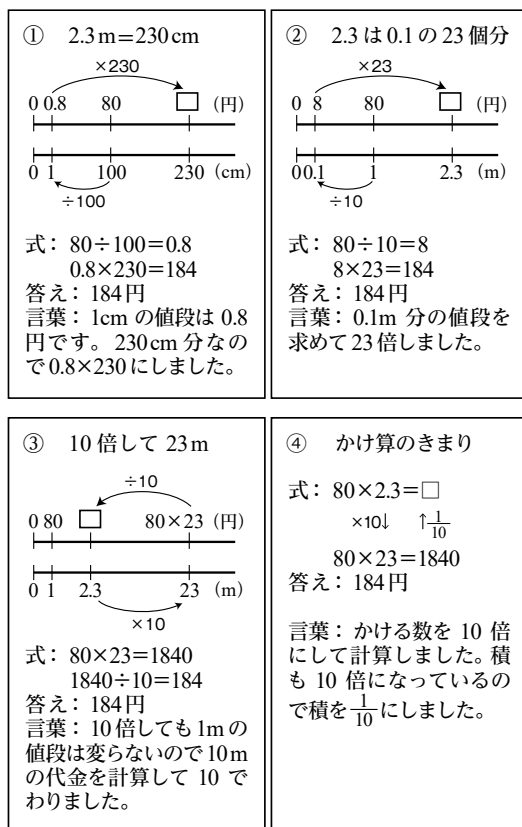


図8 予想される計算の仕方

○ この問題の数学的活動

この問題は、「解き方いろいろ」のきまりや関係を求めるオープンな問題（how to find）である。

計算の仕方を考える発散的思考では、単位をcmにしたり、0.1のいくつ分としたり、10倍して23mにしたりして何とか乗数を整数にしようと考えている。一方、かけ算のきまりを使っても考えている。

実践研究では、まず、計算の仕方を言葉、数、式、数直線を用いて考えている。その後、すべて2本の数直線で説明できることに気づき、言葉や式で考えたことを、数直線上ではどう説明できるかと数直線に関連付けをしている。これは、「単純化（Ⅲ⇒Ⅴ）」という数学的活動である。ここでは、数学的に表現し合う活動を十分に取ることが大切である。

開かれた2本の数直線は、計算の仕方を考える上で有効な道具であり、新たな計算の仕方の意味が理解しやすくなる。この場合、小数をかけてもよいという意味が容易に理解できる。そのためには、各学年の算数の学習を通して、系統的に2本のテープ図や線分図、開かれた2本の数直線等を使って、計算の仕方を考えることを身に付けておくことが重要になる。

次に、収束的思考の数学的活動の流れを図に表すと図9ようになる。実践研究では、計算の仕方を①単位を変えて、②0.1mのいくつ分、③10倍にして、④かけ算のきまりを使って、とネーミングしている。次に、計算の仕方共通点や違っている点を見つけていく。

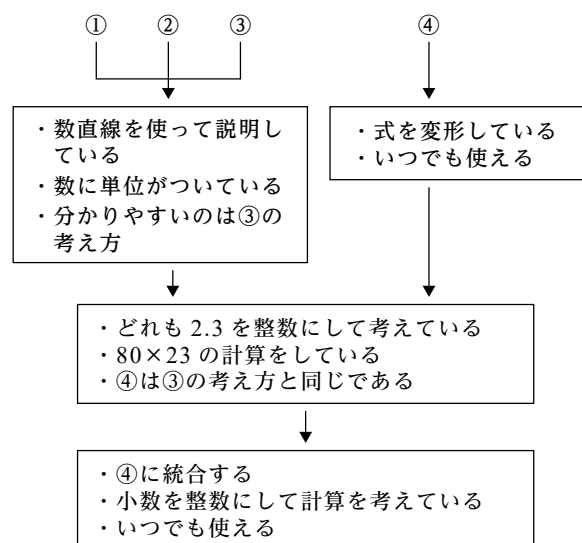


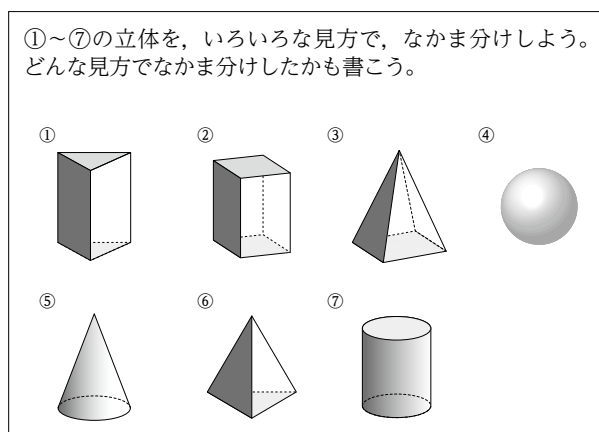
図9 収束的思考の数学的活動

①, ②, ③のすべてが2本の数直線で説明できることに気づき, 言葉や式で考えたことを数直線に関連付けて行く。そして, どれも数に単位が付いているが, 分かりやすいのは③であるということで「③10倍にして」にまとめている。③と④は, 2.3を整数化し 80×23 の計算をしていることは共通しているが, 計算がより分かりやすく簡単にできるということで, 計算の仕方を「④かけ算のきまりを使って」に統合している。

この数学的活動は, かけ算の仕方の統合化による数学的な処理である。このような表現し合う活動は, 統合的・発展的に考える資質・能力が培われるとともに, 小数のかけ算を既習のかけ算の体系的に組み込むことができる。また, 計算のきまりを使って計算をすることのよさも実感できる。

② 「空間図形」(中学1年生)¹⁵⁾

○ オープンな問題 (配当時間9時間)



○ 予想される多様な答え (反応)

予想される立体のなかま分けは, 表4のとおりである。

○ この問題の数学的活動

このオープンな問題は, 「答えいろいろ」の分類を求める問題(how to classify)である。これらの立体は, 日常生活でよく見かける形で, 「美しい建物の形によくある」といったように, 最初に子ども達に具体的なイメージで捉えさせてからアプローチさせるとよい。

まず, 小学校で学んだことを振り返らせる。第4学年では立方体, 直方体の性質, 第5学年では平面図形, 立体図形を構成する要素に着目して図形の性質を見だし, 第6学年では線対称や点対称の性質を学んでいる。このような既習の図形の内容や見方を振り返ってから, アプローチさせたい。

表4 予想される立体のなかま分け

見方	観 点	分類の内容	人数	見方	観 点	分類の内容	人数	
1. 頂点・辺・面の数	頂点の数	8つ② 6つ① 5つ③ 4つ⑥ 1つ⑤ なし④⑦	38人	4. 切断	面を平行に動かしてできるか	できる①②⑦ できない③④⑤⑥	7人	
	辺の数	12本② 9本① 8本③ 6本⑥ なし④⑤⑦	18人		回転体であるか	ある④⑤⑦ ない①②③⑥	12人	
	面と面の交わりの数	12本② 9本① 8本③ 6本⑥ 2本⑦ 1本⑤ なし④	21人		置かれている平面(底面)と平行に切る	三角形①⑥ 四角形②③ 円④⑤⑦	15人	
	面の数	6つ② 4つ⑥ 5つ①③ 3つ⑦ 2つ⑤ 1つ④	38人	5. 投影図	垂直な平面で切る	三角形③⑤⑥ 四角形①②⑦ 円④	2人	
	底面の数	2つ①②⑦ 1つ③⑤⑥ なし④	25人		真横から見る(立体図)	三角形③⑤⑥ 四角形①②⑦ 円④	37人	
2. 位置関係	平行な面	ある①②⑦ ない③④⑤⑥	6人	6. 展開図	真上から見る(平面図)	三角形①⑥ 四角形②③ 円④⑤⑦	36人	
	垂直な面	ある①②⑦ ない③④⑤⑥	7人		切り開いた形(展開図)	三角形⑥ 四角形と三角形①③ 四角形② 円と四角形⑦ 円とおうぎ形⑤ わからない④	1人	
3. 空間図形の構成	形 体	柱体①②⑦ すい体③⑤⑥ 球④	3人		底面	底面の形	円⑤⑦ 三角形①⑥ 四角形②③ なし④	39人
	面の種類	平面①②③⑥ 平面と曲面⑤⑦ 曲面④ 2種類⑤⑦ 1種類①②③④⑥	9人	側面		側面の形	三角形③⑥ 四角形①②⑦ おうぎ形⑤ なし④	23人
	線を動かしてできるか	できる①②③⑤⑥⑦ できない④	8人			(調査人数 42名)		

立体模型を観察しながらこの問題にアプローチさせる。予想される多様な答え(反応)は, 表4である。立体のなかま分けは, 「頂点・辺・面の数の見方」「位置関係の見方」「立体をつくる見方」「立体を切った見方」「平面上で見た見方」等の見方で分類・整理できる。

グルーピングの仕方は, すべての答え(反応)を, ある見方から同じ仲間であるグループとそうでないグループの2つに分ける。次にそうでないグループを別の見方から同じ仲間であるグループとそうでないグループに分ける。この手続きを繰り返して見方別のなかま分けをしていく(p.60 参照)。そして, その見方をネーミングしていく。この数学的活動は, いろいろな立体に関連付ける「関連化(Ⅲ⇒Ⅳ)」の過程である。

実践研究では, 次のような「なかま分け」をしている。

A. 面の見方 (実践でのネーミング, 以下同じ)

「面と面の交わる数」「面の数」「底面の数」「平行な面」「垂直な面」「面の種類」「底面の形」「側面の形」

B. 頂点・辺の見方

「頂点の数」「辺の数」

C. 平面におろした見方

「底面と平行に切る」「垂直な平面で切る」「真横から見る(立面図)」「真上から見る(平面図)」「切り開いた形(展開図)」

D. 立体をつくる見方

「形状」「線を動かしてできる」「面を平行に動かしてできる」「回転体である」

次の数学的活動では、グループ A から D をそれぞれの見方で問題を焦点化して分析・総合・検証し、一般化・抽象化していく。

実践研究では、「A と B の見方」は同時に考察している。立体の面に着目しながら特徴を確かめていく。立体は面で囲まれていること、面には平面と曲面があること、面と面の位置関係に目を向けながら「底面が 2 つあるものと 1 つあるものがある」「柱のような形の立体と先がとがった立体がある」等といったように確認し、立体の名称、側面、底面等の用語や面の位置関係、立体の高さ等をおさえている。このグループでの「一般化・抽象化」の学習過程では、正多面体を扱っている。そこでは、正多面体の面・辺・頂点の数や 1 つの頂点に集まる面の数にも注目させている。

C の見方については、実践研究では空間図形を平面上に表現する方法である展開図や投影図の視点から分析・総合している。立体の表面に着目して、切り開いて展開図を書き、組み立てている。展開図を書く学習になると、円柱の側面の長方形の長さ、円錐のおうぎ形の中心角の大きさ、錐体の高さといった新たな問題に突き当たってくる。問題に突き当たるたびに分析・総合と検証を繰り返し、立体の性質の理解を深め、空間概念を培っている。投影図については、「真横から見る」「真上から見る」の答え（反応）を立面図、平面図の学習につなげている。ここで大切なことは、2 つの図がセットになって立体が特定できることを実感させることである。この C の「一般化・抽象化」の学習例としては、具体物や図形の見取図から展開図や投影図を書いたり、逆に展開図や投影図から図形を読み取ったりすることを考えるとよい。このような学びを数多く経験することが、空間認識を豊かにし、立体を空間図形と捉える概念を高めるものとする。

D の見方については、立体を面や線の動いた後と

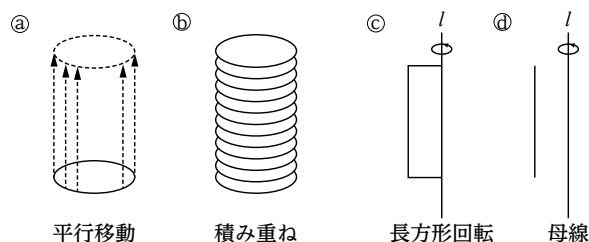


図 10 円柱の構成の仕方

みる見方である。例えば、実践研究では図 10 のように円柱を異なる 4 つの見方で捉えている。このような見方は、立体を空間図形として捉えやすくなる。また、回転の見方は、軸を含む平面で切ったり、軸に垂直な平面で切ったりすると、切り口の図形に共通な性質があることに気づく。ここでの分析・総合のポイントは、「何をどのように動かすか」である。このグループ D の「一般化・抽象化」の学習では、立方体の切断面について追求している。

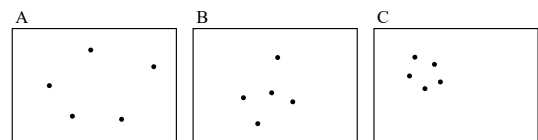
この「空間図形」における数学的活動は、立体を分類し、「数学的处理」をして、立体の多様な見方から空間図形としての「概念形成」を図っているといえる。

オープンアプローチによる学習指導では、立体の性質と表現や製作を相互関連付けた学びができ、立体の構成と表現の両面から考察ができる。そして、子ども達自らが性質を発見し、理解を深め、空間図形としての豊かな概念づくりができるようになると思う。

③ 「おはじきの問題」(小・中・高校)¹⁶⁾

○ オープンな問題

A, B, C の 3 人でおはじき遊びをしたら、下の図のようになりました。この遊びでは、落としたおはじきのちらばりの小さいほうが勝ちとなります。この例では、「おはじきのちらばりの程度は、A, B, C の順にだんだん小さくなっていく」といえます。



このような場合、ちらばりの程度を数で表すしかたをいくとおりも考えてください。

○ 予想される多様な答え（反応）

i) 長さで調べる。

- ・ 多角形の周の長さ
- ・ 線分の和
- ・ 2 点を結ぶ最大線分
- ・ 任意の点から各点への長さの和
- ・ 円などでおおうときの最小の円の半径

ii) 面積で調べる。

- ・ 多角形の面積

iii) 位置関係で調べる。

- ・ 座標導入による平均偏差、標準偏差

○ この問題の数学的活動

このオープンな問題は、「答えいろいろ」の数値化を求める問題（how to measure）である。日常事象を数理的に捉えた「数学的に表現した問題」でもある。

実践研究（小学校）では、「5点を結ぶすべての線分を引き、それらの総和でちらばりを示す」といった長さ（線分）による数値化、「5点を結んでできる多角形の面積の広さでそのちらばりを示す」といった広がり（面積）による数値化、「前もっておちる場所に得点を与えてその得点の総和でちらばりを示す」といった位置関係の考えによる数値化、等多様な答え（反応）を見つけている。この数学的活動は、散らばりを数値化するための「理想化」「単純化」といわれる過程である。

次に、数値化の観点（長さ、面積、位置）を、それぞれ焦点化して、問題として捉え、それらの問題を分析・総合及び検証していく。

ところで、散らばりの程度をみるいずれの方法にも長所や短所が存在する。ある子どもは、おのおのの図で点を結んで多角形を作り、その面積で散らばりの大小を決めようとする。また他の子どもは、それを批判して、点を一直線に並んだときのことを考えて、その方法では一般的に不都合が起こるという。このような一般化のための欠点も子どもから発見させるような数学的活動も大切にしたい。

5. おわりに

昭和50年度島田茂氏らの特定研究『数学教育における高次目標の評価方法に関する開発研究』に参画して以来、オープンアプローチによる学習指導を実践研究してきた。そのねらいは、授業改善への新しい提案である。筆者がこれまで発表してきたオープンアプローチに関する論文や著書は、8本以上ある。紙面の関係上ここで紹介するのは割愛するが、長年にわたる実践研究の結果、次のような授業改善が期待できることを明らかにしている。¹⁷⁾

- ㊦ 知的な正直さが培われる。
- ㊧ 数学の概念形成に優れている。
- ㊨ 数学的な見方・考え方が培われる。
- ㊩ 数学に対する意欲、態度によりよい変容が見られる。

このような授業改善ができる大きな要因は、オープ

ンアプローチによる学習指導では、数学的活動が豊かに内在していることにあると考える。図4の「学習過程モデル」は、大局的にみればオープンな問題にアプローチ（発散的思考）をし、見つけた多様な答え（反応）を、授業のねらいに即して収束的思考をし、次に発散的思考をするというプロセスを取っている。このオープンアプローチの各学習過程に豊かな数学的活動が内在しているということである。そこで、これらの授業改善が期待されるオープンアプローチの数学的活動の特徴について少し考えてみたい。

① オープンアプローチによる学習指導では、発散的思考した答え（反応）を、まず共通性や関連性に着目してグルーピングしている。そして、高次な見方で数学的に意味のあるグループに分け、それぞれのグループを焦点化した問題として、その問題を分析・総合・検証をしていくというプロセスを取っている。

この学習過程の数学的活動では、問題解決ための構想力や見通しを立てるといった能力が培われる。これが成果㊦や㊨につながっていると考える。

② オープンアプローチの学習指導では、「発展・応用」（小学校）及び「一般化・抽象化」（中学校）という学習過程がある。ここで働かせる数学の見方・考え方は、「先の学習への発展」「日常生活での活用」及び「概念形成」「体系化」である。この活動は、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動そのものであり、常にオープンアプローチの学習過程に組み込まれている。それが成果㊧や㊨につながっていると考える。

③ オープンアプローチによる学習指導では、「概念化」「関係化」「体系化」（図7「数学的活動モデル」参照）といった概念形成のための数学的活動が頻繁に行われている。例えば、事例「かさ」の問題では、水筒を「概念化」し「算数的処理」をして量の測定概念形成を図っている。事例「空間図形」の問題では、いろいろな立体を「関連化」（分類）し「数学的な処理」をして、空間図形としての概念形成を図っている。これらが成果㊧や㊨につながっていると考える。

④ オープンアプローチによる学習指導では、子ども

達は目的意識をもって、主体的に問題にアプローチし、子ども達が見つけた多様な答え（反応）をグループングして問題にしている。そして、その問題を分析・総合・検証し、さらに発展的に考えている。授業では、そのための数学的に表現し合う活動を盛んに行う。言い換えれば、このような学習活動にならなければ成り立たない学習指導なのである。故に、これが成果Ⅲにつながっていると考え。

オープンアプローチによる学習指導は、できる子はできる子なりに、できない子はできない子なりに多様な答え（反応）を見つける。このすべての答え（反応）を子ども達の力で収束させ、発展させていく。しかし、実践をしていくと多くの実践課題が浮かび上がってくる。それらの課題を解決するために、筆者は長く実践研究を続けてきた。そして、数多くの実践事例を積み重ねてきた結果、子ども達の数学に対する意欲、態度によりよい変容が見られることが明らかになった¹⁸⁾。

なお、年間3回程度（年間3つの単元）オープンアプローチによる学習指導を実践することにより、授業改善（成果Ⅲ～Ⅴ）が十分見られることも分かっている。多くの教師が、オープンアプローチによる学習指導で主体的、協働的で深い学びを実践し、子ども達が「できるけど嫌い」という日本独特の教科観から抜け出してくれること、子ども達が数学的に考える資質・能力を身に付け、変化の激しい社会を生き抜いてくれること、を筆者は切に願っている。

【引用・参考文献】

- 1) 国立教育政策研究所『資質・能力 理論編』東洋館出版社 2016年
- 2) 文部科学省『小学校学習指導要領（平成29年告示）解説 算数編』日本文化出版 2018年
- 3) 大杉昭英解説 『中央教育審議会答申全文と読み解き解説』明治図書 2017年 別添資料 p.243
- 4) 青山庸『オープンアプローチによる学習指導と評価に関する実践的研究—小学校算数を中心に—』仁愛大学研究紀要 人間生活学部篇第3号 2011年 pp.26～27
- 5) 数学の学習過程については、
青山庸編著『多面的にものを見る力論理的に考える力を育てる数学の授業—オープンアプローチによる学び—』東洋館出版社 2003年 pp.45～50
算数の学習過程については、

青山庸編著『オープンアプローチによる算数の学習指導』東洋館出版社 2013年 pp.14～17

- 6) 教育現場に広報する目的で、オープンアプローチの実践研究をまとめた資料集としては、次のようなものがある。
・青山庸『問題を発展的に扱って指導するための「指導資料集」の作成』（奨励研究B） 1985年
・青山庸『仁愛大学共同研究 オープンアプローチによる指導と評価に関する実践的研究』（実践研究資料） 2010年
・青山庸『仁愛大学共同研究 オープンアプローチによる学習指導の授業記録』 2011年
- 7) 例えば、青山庸編著『オープンアプローチによる算数の学習指導』では、pp.18～22
- 8) 例えば、青山庸編著『オープンアプローチによる算数の学習指導』では、pp.22～27
- 9) 例えば、青山庸編著『オープンアプローチによる算数の学習指導』では、pp.27～35
- 10) 青山庸『問題を発展的に扱う数学科の指導—数学の改善をめざして—』東洋館出版社 1986年 pp.21～27 実践者は筆者
- 11) 青山庸編著『オープンアプローチによる算数の学習指導』東洋館出版社 2013年 pp.136～146 実践者は、藤田淳子、桑原礼子のティームティーチング
- 12) 能田伸彦『算数・数学科オープンアプローチによる指導の研究—授業の構成と評価—』東洋館出版社 1983年 pp.158～166
- 13) 島田茂編著『算数・数学のオープンエンドアプローチ—授業改善への新しい提案—』みずうみ書房 1977年 p.215
- 14) 青山庸編著『オープンアプローチによる算数の学習指導』東洋館出版社 pp.70～73 実践者は筆者
- 15) 青山庸編著『多面的にものを見る力論理的に考える力を育てる数学の授業—オープンアプローチによる学び—』東洋館出版社 pp.113～122 実践者は筆者
- 16) 「おはじきの問題」の出典は、13) のp.38
この問題による実践は、筆者を含め小・中学校で筆者が関係する研究会で多くの先生が実践を試みている。
- 17) 初期の論文では、
青山庸『オープンな問題場面を生かす教授方略と評価に関する研究』日本数学教育学会誌 第63巻第3号 数学教育 35-2 1981年 pp.30～38
最近の論文では、
青山庸『オープンアプローチによる学習指導と評価に関する実践的研究—小学校算数を中心に—』仁愛大学研究紀要 人間生活学部篇第3号 2011年 pp.23～39
- 18) 例えば17) の論文では、
初期の論文はp.37、最近の論文はpp.37～39 で実践結果のデータを提示している。

